M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Trigonometrie

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

25. Februar 2023

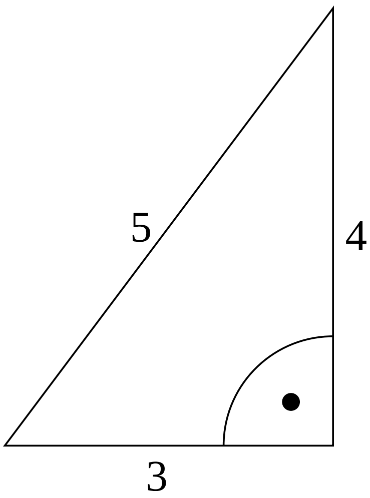
8 Trigonometrie

8.1 Rechtwinklige Dreiecke

Der Satz von Pythagoras hilft uns, bei einem rechtwinkligen Dreieck Seitenlängen zu bestimmen.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

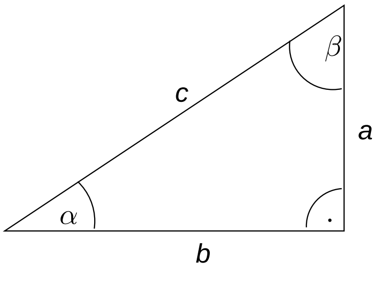
Ziel dieses Kapitels ist, auch Seitenlängen aus gegebenen Winkeln und Winkel aus gegebenen Seitenlängen zu berechnen. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf rechtwinklige Dreiecke.



Definition 8.1

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nennt sich Hypotenuse, die anderen beiden Seiten heissen Katheten. Die *am* Winkel α liegende Seite heisst *Ankathete* zu α, die gegenüberliegende Seite heisst *Gegenkathete*. Für β sind die Rollen der Katheten vertauscht.

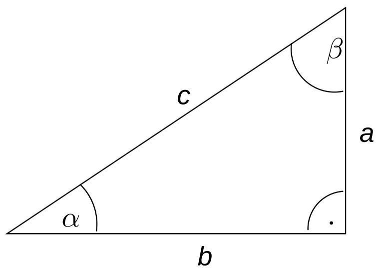
Winkel	α	β
Gegenkathete	a	b
Ankathete	b	a



8.1.1 Verhältnisse an rechtwinkligen Dreiecken

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras lassen sich in einem rechtwinkligen Dreieck fehlende Seitenlängen bestimmen. Das soll nun so erweitert werden, dass auch mit Winkeln Längen berechnet werden können, und aus Längen Winkel.

Im Auftrag 1 geht es zunächst um Dreiecke mit Hypotenusenlänge $c = 1$. Dann wird aber schnell klar, dass diese Ergebnisse sich leicht auf andere Hypotenusenlängen verallgemeinern lassen.



Auftrag 8.1: Tabelle von Kathetenlängen

Gehen Sie davon aus, dass die Hypotenusenlänge $c = 1$ beträgt.
Zunächst geht es darum, die Länge der Gegenkathete a zu ermitteln, bei verschiedenen Winkeln.
Da die Strecken im vorgegebenen Dreieck sehr kurz sind, sollten Sie grössere Dreiecke zeichnen und sich dann überlegen, wie damit auch die Streckenlängen am kleineren Dreieck ermitteln können – möglichst genau.

Teilen Sie sich in der Klasse so auf, dass jeweils zwei Personen ein Feld der folgenden Tabelle ausfüllen.

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
Gegenkathete								

Auftrag 8.2: Längen aus Winkeln und Winkel aus Längen bestimmen

a) Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 12 cm lang. Der Winkel α beträgt 20°. Wie lang ist die Gegenkathete?

b) Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 12 cm lang. Der Winkel α beträgt 24°. Wie lang ist die Gegenkathete näherungsweise? Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

c) Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Gegenkathete 10 cm lang. Der Winkel α beträgt 30°. Wie lang ist die Hypotenuse? Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

d) Bei einem rechtwinkligen Dreieck werden für die Länge der Gegenkathete 8cm gemessen, die Länge der Hypotenuse ist 16 cm. Wie gross ist der Winkel α?
Beschreiben Sie kurz, wie sich aus gegebenen Längen der Winkel bestimmen lässt.

Auftrag 8.3: Näherungswerte

a) Ist der Mittelwert der Gegenkathetenlängen von 10 und 70 Grad gleich der Länge der Gegenkathete bei 40 Grad, zumindest näherungsweise?

Für welche Winkel ist die Länge der Gegenkatheten relativ genau aus solchen Mittelwerten berechenbar?

b) Geben Sie eine gute Schätzung ab, wie lang die Gegenkathete ist wenn $\alpha = 25°$, $\alpha = 75°$ oder $\alpha = 5°$ ist.

Auftrag 8.4: Die Ankathete

Bisher wurden nur die Gegenkatheten betrachtet. Die Längen der Ankatheten liessen sich nun genauso durch Messung bestimmen. Nachdenken über die Situation im rechtwinkligen Dreieck führt auch zum Ziel.

Füllen Sie die Tabelle für die Ankathete aus, vorzugsweise ohne zu messen, allenfalls aber mit Rechnungen.

α		10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	
Gegenkathete										
Ankathete										

Auftrag 8.5: Spezialfälle

In die leere zweite Spalte gehört der Winkel 0°. Das gibt kein Dreieck. Trotzdem lassen sich sinnvolle Werte in dieser Zeile eintragen – Welche?

Tragen Sie genauso Werte in der letzten Spalte ein.

Auftrag 8.6: Allgemeine Formel

Sie haben bei der Zeichnung im Auftrag 1 Dreiecke mit Hypotenusenlänge grösser als 1 verwendet und dann die Länge der Gegenkathete berechnet. Welche Rechnung haben Sie durchgeführt? (Nennen Sie die Gegenkathete a und die Hypotenuse c).

Welche Rechnung braucht es dann für die dritte Spalte?

Auftrag 8.7: Beide Katheten

Fertigen Sie eine Tabelle mit den Winkeln von 10 bis 80 Grad und dem folgenden Quotienten an:
«Gegenkathete : Ankathete»= $\frac{a}{b}$.

8.1.2 Sinus und Cosinus

In rechtwinkligen Dreiecken hängen die unten stehenden Brüche nur von den Winkeln ab. Wir definieren:

Definition 8.2

Trigonometrische Zusammenhänge

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \text{ Gesprochen: Sinus von } \alpha$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} \text{ Gesprochen: Cosinus von } \alpha$$
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ Gesprochen: Tangens von } \alpha$$

sin, cos und tan heissen trigonometrische Funktionen.

Damit gilt für Geraden: $m = \tan\alpha$

1. Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten a=24cm und b=10cm. Bestimmen Sie c und $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\tan\alpha$.

2. Prüfen Sie, ob das Dreieck mit $a = 6.6$cm, $b = 11.2$cm und $c = 13$cm rechtwinklig ist (Pythagoras). Berechnen Sie dann $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ und $\tan\beta$.

3. Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 37°$. Messen Sie die Seiten und berechnen Sie dann $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ und $\tan\beta$.

Satz 8.1

Es gilt $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

$\beta = 90° - \alpha$ □

4. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse drei Mal so lang wie die Seite a. Berechnen Sie $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ und $\tan\beta$. (Tipp: Pythagoras)

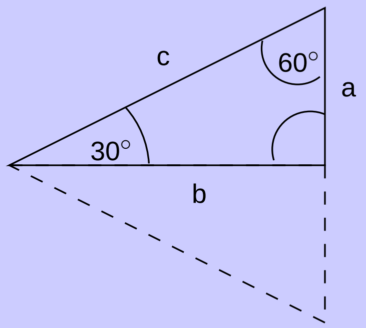
Beispiel 8.1

Spezielle Winkel

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } \sin 30° = \frac{1}{2}$$

Ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 30$ Grad lässt sich wie im Bild zu einem gleichseitigen Dreieck ergänzen. Es ergibt sich $a = c/2$. Der Satz von Pythagoras liefert damit

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 = \frac{c^2}{4} + b^2 \\ \frac{3}{4}c^2 &= b^2 \\ \frac{3}{4} &= \frac{b^2}{c^2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{b}{c} = \cos 30^\circ \end{aligned}$$



Noch einfacher ergibt sich der Sinus aus $a = c/2$, also $\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$

5. Bestimmen Sie ohne Messung und ohne Taschenrechner Sinus und Cosinus von 60 Grad.

6. 1.7 Bestimmen Sie ohne Messung und ohne Taschenrechner Sinus und Cosinus von 45 Grad.

8.1.3 Berechnung rechtwinkliger Dreiecke

Geben Sie die Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an.

7. Berechne a) $\sin 23^\circ$ b) $\cos 42^\circ$ c) $\tan 45^\circ$ d) $\sin 35.34567^\circ$ e)$\tan 0^\circ$

8. Bestimmen Sie zu den folgenden Längen den Winkel α. Die Bezeichnungen sind wie in der Figur zu Definition 8.1.

a) $a = 4, c = 5$
b) $b = 4, c = 7$
c) $a = 4, b = 5$
d) $a = 4, b = 9$
e) $a = 5, b = 4$
f) $b = 4, c = 7$
g) $a = 6, c = 4$

9. (PUZZLE) Berechnen Sie die fehlenden Längen und Winkel.Die Bezeichnungen sind wie in der Figur zu Definition 8.1.

a) Gegeben $c = 58,4$m, $\alpha = 28.5^\circ$

b) Gegeben $a = 146.2$m, $\beta = 46^\circ$

c) Gegeben $c = 2.56$km, $a = 323$m

d) Gegeben $a = 10.34$m, $b = 6.42$m

10. Berechnen Sie die fehlenden Längen und Winkel. Die Bezeichnungen sind wie in der Figur zu Definition 8.1.

a) Gegeben $c = 9.8$cm, $\beta = 35°$

b) Gegeben $b = 14.5$cm, $\alpha = 64°$

c) Gegeben $c = 22.4$m, $b = 9.8$m

d) Gegeben $a = 12,8$m, $b = 23.4$m

11. Berechnen Sie p, q und h in der nebenstehenden Figur mit den folgenden Daten. Tipp: Es gibt auch Höhen- und Kathetensatz.

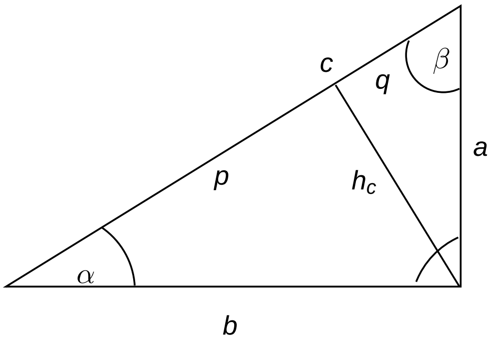
a) $a = 3$cm und $c = 5$cm

b) $b = 6$m und $\alpha = 42°$

c) $a = 4$cm und $\alpha = 37°$

d) $c = 9$cm und $\alpha = 75°$

e) $a = 21$cm und $b = 42$cm



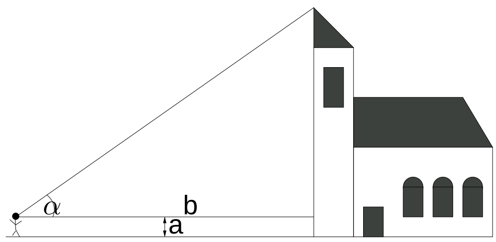
12. Eine Leiter der Länge $l = 5.5$m lehnt in der Höhe $h = 4.2$m an der Wand. Bestimmen Sie den Neigungswinkel.

13. Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten $s = 26$m lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 42°$ einfallen?

8.1.4 Aufgaben im Zusammenhang

Geben Sie bei diesen Aufgaben darauf acht, im Ergebnis nicht mehr geltende Stellen als in der Aufgabenstellung zu haben.

14. Der Erhebungswinkel einer Kirche.



a) Eine Person mit Augenhöhe a=1.5 m befindet sich b =42m von einer Kirche entfernt. Der Erhebungswinkel beträgt α = 27°. Wie hoch ist die Kirche?

b) Eine Kirche ist 33m hoch. Eine Person mit Augenhöhe a =1.5m befindet sich b =20m von der Kirche entfernt. Unter welchem Erhebungswinkel wird die Kirche gesehen?

15. Ein gerades Strassenstück der Länge l = 300m steigt unter α = 12°. Wie lang ist es auf einer Karte im Massstab 1:5000?.

16. Die grösste Steigung bei einem Alpenpass beträgt 19 Prozent. Berechnen Sie den Neigungswinkel.

17. Beim Wandern möchten Sie wissen, wie weit Sie noch von Ihrem Ziel entfernt sind. Am Ziel steht ein 15 stöckiges Wohnhochhaus. Sie schauen auf die Spitze des Wohnhauses und schätzen den Winkel, den Ihre Blickrichtung mit der Horizontalen einschliesst auf 1 Grad.

Wie weit ist das Haus entfernt? (Zur Lösung braucht es eine sinnvolle Schätzung der Höhe des Hauses.)

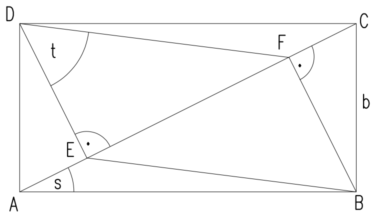
18. Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die eine Kathete 10cm und die Hypotenuse 8cm lang ist.

b) Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die eine Kathete 40km und die andere 8cm lang ist.

c) Es lässt sich ein 6km langer Tunnel bauen, bei dem der Ausgang 3km nördlich und 2km westlich vom Eingang ist. Im Tunnel wird eine Höhendifferenz von 200m überwunden.

19. Im Rechteck ABCD beträgt der Winkel $s = 31,75$ Grad und die Länge b=5cm. Berechnen Sie den Winkel t.



8.1.5 Flächenberechnungen

Auftrag 8.8

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seitenlängen b = 3 cm und c = 2 cm und dem Winkel α = 65°. Berechnen Sie mit diesen Angaben den Flächeninhalt A des Dreiecks. Tipp: Benützen Sie die Höhe h_b, die senkrecht zu b steht.

Satz 8.2

Im Dreieck mit den typischen Bezeichnungen gilt für die Fläche die Formel

20. Berechnen Sie die Fläche folgender rechtwinkliger Dreiecke

a) $b = 4, c = 5, \alpha = 40^\circ$

b) $a = 4, c = 7, \alpha = 30^\circ$

21. Von einem rechtwinkligen Dreieck kennen Sie $a = 3$ und die Fläche $A = 6$. Berechnen Sie die fehlenden Seiten.

8.1.6 Der trigonometrische Pythagoras

Definition 8.3

$$(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha \text{ } \textit{und} \text{ } (\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$$

Satz 8.3

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Dieser Satz ist einer der wichtigsten in der Trigonometrie. Er ergibt sich einfach, indem der Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ durch c^2 geteilt wird: Rechts ergibt sich 1, links

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

22. Berechnen Sie den Cosinus von α , wenn die folgenden Werte für den Sinus bekannt sind. Der Taschenrechner darf für trigonometrische Zusammenhänge nicht benutzt werden.

a) $\sin\alpha = 0.8$

b) $\sin\alpha = 12/13$

c) $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$

d) $\sin\alpha = 0$

e) $\sin\alpha = 15/17$

8.1.7 Höhenwinkel, Tiefenwinkel, Sehwinkel

Informieren Sie sich, was die Begriffe bedeuten, zum Beispiel unter

https://www.mein-lernen.at/trigonometrie/14224-hoehenwinkel-tiefenwinkel-und-sehwinkel

23. Aus einem Fenster im 1. Stock eines Wohnhauses (Höhe 4.80 m) erblickt man die Spitze eines Bürohauses unter dem Höhenwinkel von 36.2° und die Basis unter dem Tiefenwinkel von 4.4°. Wie hoch ist das Bürohaus und wie weit sind Wohnhaus und Bürohaus voneinander entfernt?

24. Von der Aussichtsplattform eines Leuchtturms (Höhe 92 m ü. M.) erscheint ein Segelschiff unter einem Tiefenwinkel von 32°.

a) Wie weit ist das Schiff vom Leuchtturm entfernt? Erstellen Sie zunächst eine Skizze.

Unter welchem Tiefenwinkel erscheint im selben Augenblick dasselbe Segelschiff, wenn man es aus einem Fenster des Leuchtturms in halber Höhe des Leuchtturms betrachtet? Skizzieren Sie und berechnen Sie.

b) Führen Sie das auch mit einem Viertel der Höhe und einem Zehntel der Höhe durch. Ist die Zuordnung Höhe $\rightarrow$ Winkel eine Proportionalität? Begründen Sie.

8.2 Dreiecke mit beliebigen Winkeln

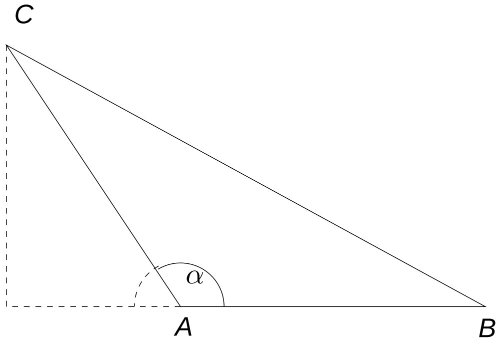
Bislang haben wir uns auf rechtwinkligen Dreiecke beschränkt. Auch an Dreiecken ohne rechte Winkel lassen sich interessanterweise mit Sinus und Cosinus Längen und Winkel berechnen. Die zugehörigen Formeln sind aber nicht mehr einfache Verhältnisse.

Geben Sie bei innermathematischen Aufgaben die Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet an. Bei Aufgaben mit einem aussermathematischen Zusammenhang runden Sie so, dass Sie nicht mehr geltende Stellen bekommen als in der Aufgabenstellung.

Bevor wir zu diesen Formeln kommen, müssen wir zunächst einmal Sinus und Cosinus auch für Winkel grösser als 90 Grad erklären. Das wird so getan, dass sich die weiteren Formeln einfach schreiben lassen.

8.2.1 Sinus und Cosinus bis 180°

Nun werden auch Dreiecke betrachtet, die nicht rechtwinklig sind. Dabei auch treten Winkel auf, die grösser als 90° sind. Dafür werden Sinus und Cosinus mit dem gestrichelt gezeichneten Dreieck definiert. Zu beachten ist für den gestrichelt eingezeichneten Nebenwinkel zu α, dass er die Grösse $180° - \alpha$ hat.



Definition 8.4

$\sin\alpha = \sin(180 - \alpha)$ und $\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$

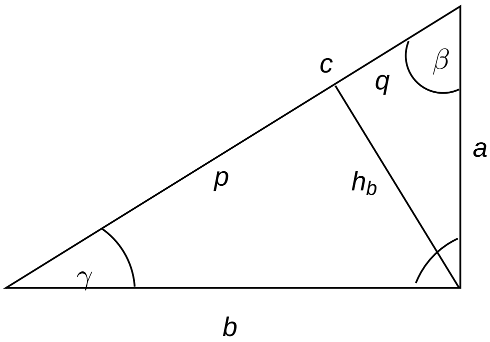
Das negative Vorzeichen beim Cosinus erklärt sich dadurch, dass die untere Seite des Dreiecks von A aus in die andere Richtung gemessen wird – die negative Richtung.

8.2.2 Der Cosinussatz

Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, gilt die folgende Formel natürlich nicht mehr:
$c^2 = a^2 + b^2$
Es braucht einen korrigierenden Term, der von den Längen der Seiten und vom Winkel abhängt.
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
Diese Formel heisst Cosinussatz und wird nun hergeleitet:

Es gilt:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \text{ also } h_b = a\sin\gamma$$
$$\cos\gamma = \frac{q}{a} \text{ also } q = a\cos\gamma$$
$$p = b - q$$



Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned}
c^2 &= p^2 + h_b^2 = (b-q)^2 + (a\sin\gamma)^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + (a\sin\gamma)^2 \\
&\quad \text{Wir verwenden eine binomische Formel und formen dann um} \\
&= b^2 - 2ba\cos\gamma + (a\cos\gamma)^2 + (a\sin\gamma)^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2(\cos\gamma)^2 + a^2(\sin\gamma)^2 \\
&\quad \text{Ausklammern von } a^2 \text{ und verwenden des trigonometrischen Pythagoras} \\
&= b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\left((\cos\gamma)^2 + (\sin\gamma)^2\right) = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2 \\
&\quad \text{Umsortieren liefert den behaupteten Satz.} \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma
\end{aligned}$$

□

Umstellen nach γ:

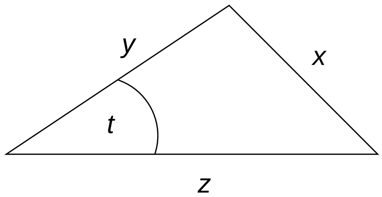
$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \text{ also } \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Damit gilt

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

25. Gegeben ist ein Dreieck mit $a = 4$cm, $b = 3$cm und $\gamma = 80°$. Berechnen Sie c.

26. Gegeben ist ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 3$cm, $b = 4$cm und $c = 6$cm. Berechnen Sie die Winkel.



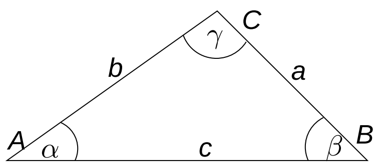
Satz 8.4: Cosinussatz

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y und z. Der der Seite x gegenüberliegende Winkel heisst t. Dann gilt

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos t$$

27. Formulieren Sie den Cosinussatz für ein Dreieck mit den „normalen“Bezeichnungen für α und β.

28. Bestimmen Sie die fehlenden Seiten und Winkel.



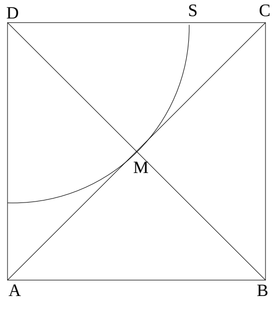
a) $a = 10\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$, $\beta = 60^\circ$
b) $a = 6\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$
c) $a = 42.32\text{m}$, $b = 72.4\text{m}$, $\gamma = 73.5^\circ$
d) $a = 321\text{m}$, $b = 172\text{m}$, $c = 252\text{m}$

29. Zwei Kräfte, die am gleichen Punkt ansetzen, schliessen einen Winkel von 35 Grad miteinander ein. Die eine Kraft hat den Betrag 72 Newton, die andere 35 Newton. Wie gross ist die resultierende Kraft?

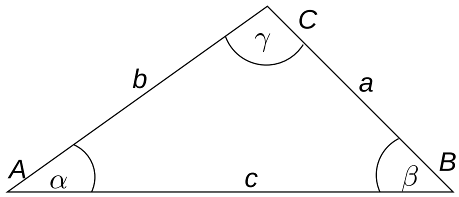
30. Es soll die Entfernung zweier Punkte A und B bestimmt werden. Leider liegt zwischen den beiden Punkten ein kleines Hindernis, dass die direkte Entfernungsmessung verhindert. Weitere Hindernisse sind in der Umgebung von A und B nicht vorhanden.

Erklären Sie , wie mit Hilfe von Entfernungsmessern und Winkelmessern unter Zuhilfename eines oder mehrerer weiterer Punkte trotzdem die Entfernung $\overline{AB}$ bestimmt werden kann.

31. Beschreibung des Bildes:
Ein Quadrat ABCD hat Seitenlänge 1. Der Schnittpunkt der Diagonalen wird mit M bezeichnet. Ein Kreis mit Mittelpunkt D und Radius DM schneidet die Strecke CD im Punkt S. Wie gross sind die Seitenlängen und Winkel im Dreieck BSM?
Hinweis: Auf dem Weg zur Lösung müssen viele Längen und Winkel in dieser Zeichnung bestimmt werden. Oft hilft der Satz von Pythagoras.



8.2.3 Der Sinussatz



Ein Dreieck, bei dem zwei Winkel und eine Seitenlänge gegeben sind, lässt sich eindeutig konstruieren. Was uns noch fehlt, ist eine Formel, die zwei Winkel enthält – mit der sich diese Konstruktion also rechnerisch nachvollziehen lässt. Am einfachsten wäre es, wenn $\frac{a}{b}$ gleich $\frac{\alpha}{\beta}$ wäre. Ganz so einfach ist es nicht, aber fast:

Satz 8.5: Sinussatz

In einem Dreieck mit den obigen Bezeichnungen gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

32. Formulieren Sie den Sinussatz mit den Seiten *a* und *c* bzw *b* und *c* und den entsprechenden Winkeln.

Die Herleitung benutzt die Höhe h_c über der Seite c, und die beiden rechtwinkligen Dreiecke, die daraus entstehen:

$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$, also $h_c = b\sin\alpha$ und
$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$, also $h_c = a\sin\beta$. Zusammensetzen gibt den Ausdruck
$h_c = b\sin\alpha = a\sin\beta$. Umformen liefert

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

□

Satz 8.6: Flächenformel

Es gilt für die Fläche eines Dreiecks: $A = b \cdot c \sin\alpha$

33. Beweisen Sie den obigen Satz mit Hilfe einer Formel für h_c, die beim Sinussatz benötigt wurde. Formulieren Sie die Flächenformel auch mit β und γ.

34. Bestimmen Sie die fehlenden Seiten und Winkel. (Bezeichnungen wie im Bild vor dem Sinussatz)

a) $a = 5\text{cm}$, $\alpha = 42.15°$, $\beta = 37.13°$

b) $a = 9\text{cm}$, $b = 12\text{cm}$, $\beta = 68°$

c) $a = 3.4\text{m}$, $\alpha = 40°$, $\gamma = 65°$

d) $a = 3.5\text{cm}$, $b = 5.3\text{cm}$, $\alpha = 35°$

Vorsicht: Beim Sinussatz können zwei Lösungen auftreten, deren Winkel sich folgendermassen ergänzen $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$.

35. Bestimmen Sie die fehlenden Seiten und Winkel. (Bezeichnungen wie im Bild vor dem Sinussatz)

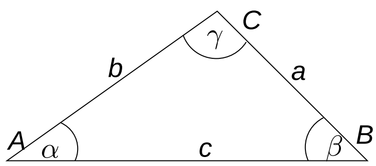
a) a = 5cm, b = 4cm, γ = 28°

b) a = 8m, β = 74°, γ = 46°

c) b = 4.5cm, c = 8.2cm, β = 28°

8.2.4 Vermischte Aufgaben

36. Berechnen Sie die fehlenden drei Angaben für die folgenden Dreiecke. Gibt es keine oder mehrere Lösungen, so muss dies notiert werden.

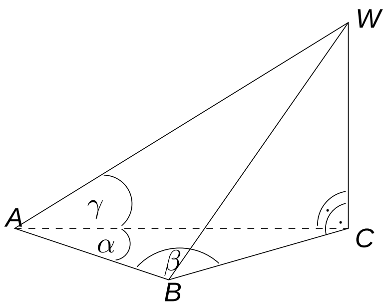


a) a = 3cm, b = 4cm, c = 5cm

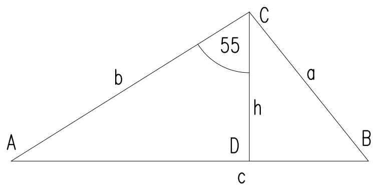
b) a = 5cm, b = 7cm, α = 20°

c) α = 20°, β = 80°, c = 8m

37. Es soll die Höhe eines Bergs (Weissenstein bei Solothurn) bestimmt werden. Dazu werden zwei Punkte A und B gewählt, die sich beide auf der Höhe 428m über dem Meersesspiegel befinden (Aareniveau in Solothurn). Die beiden Punkte liegen 3.5km voneinander entfernt. Der Berg ist im Bild links mit W bezeichnet. Mit C wird der Punkt senkrecht unterhalb des Berggipfels, in Höhe der Punkte A und B bezeichnet. Leider ist C nicht sichtbar. Trotzdem lassen sich die folgenden Winkel bestimmen: $\alpha = \angle CAB$ = 76°, $\beta = \angle ABC$ = 66° und $\gamma = \angle CAW$ = 9.36°.
Wie hoch ist der Berg?



38. Im Dreieck ist die Strecke $\overline{DB}$ =4,5cm und h =5,5cm. Berechnen Sie die Strecken a, b und c.



39. In einem Dreieck ist die Seite c = 5cm und der Winkel α = 40 Grad. Die Seitenhalbierende der Seite b ist 5,5cm lang.

a) Konstruieren Sie das Dreieck.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Länge der Seiten a und b.

40. In einem Viereck *ABCD* soll die Länge der Strecke $\overline{\text{CD}}$ berechnet werden. Es gelten die folgenden Angaben:

- Der Punkt D befindet sich 2,2km nördlich von A.
- Der Punkt B befindet sich 2,5km östlich von A.
- Der Winkel $\angle$DBC beträgt 60 Grad.
- Der Winkel $\angle$BDC beträgt 50 Grad.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze an, ausgehend von A.

Auftrag 8.9

Entwerfen Sie eine eigene Aufgabe mit einem Viereck, bei dem Sinus- oder Cosinussatz benötigt werden.

9 Lösungsverzeichnis