M:eta
Mathematik: Einführung, Theorie, Aufgaben
Ähnlichkeit

Torsten Linnemann

Gymnasium Oberwil – Fachmittelschule

25. Februar 2023

7 Ähnlichkeit

7.1 Vergrössern und Verkleinern

Auftrag 7.1: Bildbearbeitung

Fotos von Models in Zeitschriften sind oft elekronisch verändert. Das lässt sich aber durchaus auch mit Mathematikern durchführen. Welches der beiden Bilder rechts ist «richtig“? Woran ist das zu erkennen?

a) Das obige Bild hat im Original 600x1600 Pixel (Breite x Höhe). Wie muss die Pixelzahl geändert werden, damit der Mathematiker schmaler scheint, wie, um ihn zu verbreitern? Geben Sie Beispiele.

b) Stellen Sie sich vor, auf einer Internetseite hat nur ein Bild mit einer Breite von 400 Pixeln Platz. Wie ist die Höhe zu wählen, so dass keine Verzerrung auftritt?

c) Allgemein: Wie erkennt man an den Pixelzahlen für Höhe und Breite, ob sich zwei Bilder nur in der Grösse unterscheiden oder auch an den Proportionen?

d) Die Datei mit dem Originalbild hat eine Dateigrösse von 2.8MB (Bitmap-Format). Wie gross ist wohl die Datei, bei der das Bild eine Breite von 400 Pixeln hat?

e) Zum Versenden soll das Bild möglichst genau eine Grösse von 100KB haben. Wie gross sind die Pixelzahlen zu wählen?

f) Um auf den wichtigen Teil des Bildes zu fokussieren, wird das Bild auf 600x800 Pixeln zurechtgeschnitten. Wie ist ein Ausdruck auf Fotopapier zu wählen, dass es möglichst wenig Verschnitt gibt: 10x15, 13x18 oder 9x13?

Auftrag 7.2: Zentralperspektive

Aus dem Zeichenunterricht kennen Sie bereits die Zentralperspektive. Indem Gegenstände weiter weg vom oder näher am Betrachter platziert werden, werden sie verkleinert oder vergrössert.
Wählen Sie einfache geometrische Figuren (z.B. verschiedene Dreiecke und Rechtecke) und verkleinern/vergrössern Sie sie, indem Sie sie entlang der Strahlen vom Fluchtpunkt versetzen.
Welche der Eigenschaften der Figuren bleiben gleich, welche ändern sich

- bei der Versetzung entlang der Strahlen vom Fluchtpunkt?
- bei unterschiedlicher Platzierung im Raum? (Die Türen im Bild rechts sind verschieden im Raum platziert, mal parallel mal senkrecht zur Blickrichtung)

Auftrag 7.3: Vergrössern und Verkleinern

Im letzten Auftrag wurden räumliche Situationen gezeichnet. Die Zeichnungen lassen sich auch ohne die dritte Dimension betrachten.

Beziehen Sie die Erkenntnisse aus den letzten beiden Aufträgen ein, um die folgende Frage zu beantworten:

Wie lässt sich prüfen, ob zwei Figuren Verkleinerungen/Vergrösserungen voneinander sind?

7.1.1 Ähnlichkeit und zentrische Streckung

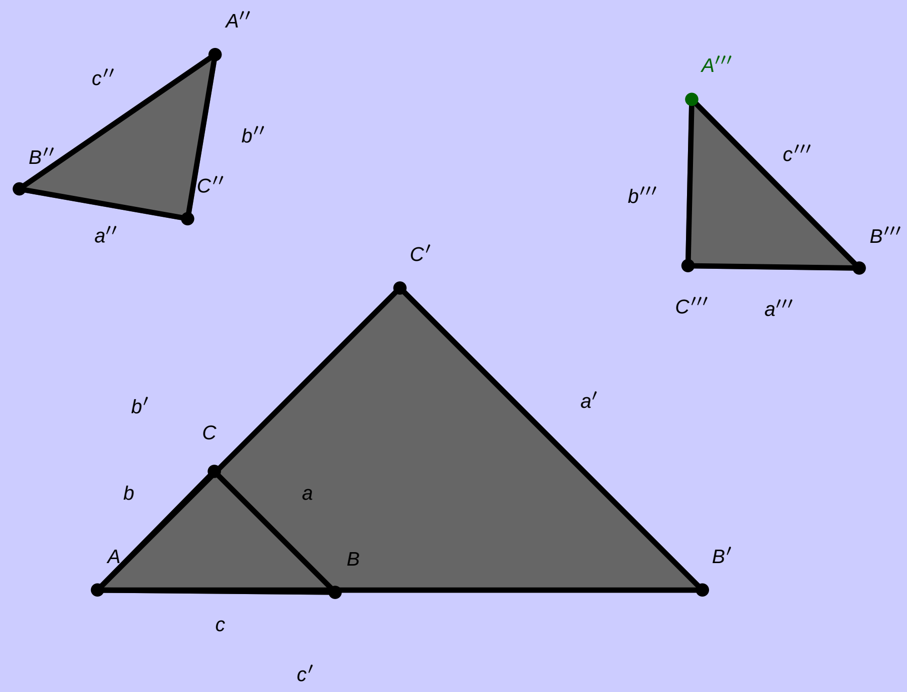
Wir benötigen eine präziserer Definition von „vergrössern und verkleinern“. Der mathematische Begriff dafür ist Ähnlichkeit:

Definition 7.1

Der Prozess, mit Hilfe eines Fluchtpunktes Figuren zu vergrössern und zu verkleinern heisst zentrische Streckung. Die dabei entstehenden Figuren heissen ähnlich zueinander. Auch wenn die Figur nach der zentrischen Streckung noch gedreht, gespiegelt oder verschoben wird, bleibt sie zur ursprünglichen Figur ähnlich.

Beispiel 7.1

Im Bild unten finden sich 4 Dreiecke, die alle ähnlich zueinander sind. Sie lassen sich durch eine zentrische Streckung, eine Drehung und eine Spiegelung ineinander überführen.



Nun geht es darum, die Eigenschaften ähnlicher Figuren genauer festzuhalten.

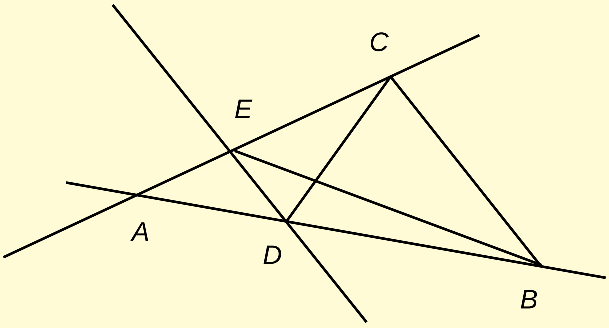
Die Eigenschaften werden wir nicht bewiesen. Eine Ausnahme ist der Zusammenhang aus dem nächsten Arbeitsauftrag.

Auftrag 7.4: Zentralperspektive und Strahlensätze

Es handelt sich um eine getreue Übersetzung aus den «Elementen» von Euklid. Dieses Buch war während 2000 Jahren das Standardlehrwerk in der Mathematik – und es lässt sich heute noch lesen – Suchmaschinen liefern sofort Links.

Euklids Elemente VI.2

Eine Parallele zu einer Seite eines Dreiecks teilt die beiden anderen Seiten im gleichen Verhältnis. Werden im Dreieck zwei Seiten im gleichen Verhältnis geteilt, dann ist die Gerade durch die teilenden Punkte parallel zur übrigen Seite.



Beweis: Wenn im Dreieck ABC parallel zur Seite BC die Gerade DE gezogen wird, dann, sage ich, verhält sich BD zu DA wie CE zu EA.

Denn wenn BE und CD eingetragen werden, sind die Dreiecke BDE und CDE gleich der Grösse nach, da sie die gleiche Grundseite DE haben und zwischen den Parallelen DE und BC liegen, und stehen zum Dreieck ADE, im gleichen Verhältnis, somit verhält sich BDE zu ADE wie CDE zu ADE.

Das Dreieck BDE verhält sich zu ADE wie die Grundseite BD zu DA, da beide Dreiecke die gleiche Höhe haben, die als Senkrechte auf AB durch den Punkt E zu errichten ist.

Aus dem gleichen Grund verhält sich das Dreieck CDE zu ADE wie die Grundseite CE zu EA. Damit verhält sich BD zu DA wie CE zu EA.

(Der Beweis des zweiten Teils von Euklids Aussage wird in diesem Skript ausgelassen.)

Satz 7.1

Ähnlichkeitssätze, Quelle: Wikipedia

- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei (und somit in drei) Winkeln übereinstimmen. (W:W:W-Satz)
- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in allen Verhältnissen entsprechender Seiten übereinstimmen. (S:S:S-Satz)
- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen. (S:W:S-Satz)
- Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und in dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. (S:S:W-Satz)

Beispiel 7.2

- Ein Dreieck hat den Winkel $\gamma = 35^\circ$ und die anliegenden Seiten $a = 4$ cm und $c = 5$ cm.
  Ein zweites Dreieck hat den Winkel $\gamma = 35^\circ$ und die anliegenden Seiten $d = 15$ cm und $e = 12$ cm.
- Ein Dreieck hat die Seitenlängen 2, 3 und 4 cm. Ein anderes Dreieck hat die Seitenlängen 4.5, 3 und 6 cm.

Auftrag 7.5

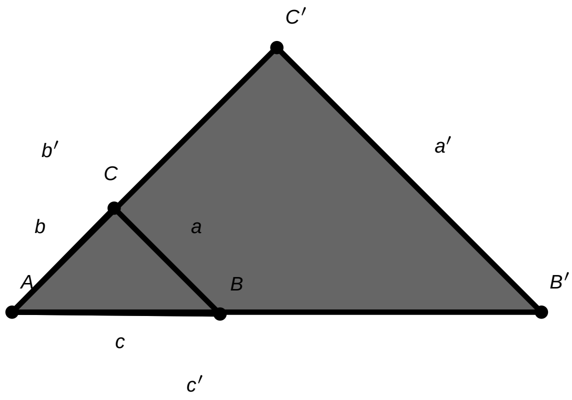
Zeichnen Sie ein Dreieck mit $c = 4$cm, $h_c = 3$cm und $\alpha = 45^\circ$. Zeichnen Sie ein dazu ähnliches Dreieck mit drei Mal so grossen Seitenlängen. Berechnen Sie beide Flächeninhalte.

Vergleichen Sie mit den Resultaten des ersten Arbeitsauftrag zur Bildbearbeitung.

Satz 7.2

Wenn die Seiten eines Dreiecks jeweils k-mal so lang sind wie die eines anderen, dann ist sein Flächeninhalt k^2 Mal so gross.

Unten ist $k = 2.5$ und der Flächeninhalt ist 6.25 mal so gross.



1. Können zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit den folgenden Daten zueinander ähnlich sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

   a) $a = 4$cm, $b = 2.6$cm, $\gamma = 40^\circ$ und a'=10cm, $b' = 6.7$cm und $\gamma = 40^\circ$

   b) $a = 4$cm, $b = 2.6$cm, $\gamma = 40^\circ$ und $a' = 10.5$cm, $b' = 6.5$cm und $\gamma = 40^\circ$

   c) $a = 4$cm, $b = 2.6$cm, $\gamma = 40^\circ$ und $a' = 6.5$cm, $b' = 10$cm und $\gamma = 40^\circ$

   d) $a = 4.2$cm, $b = 2.6$cm, $\gamma = 40^\circ$ und $a' = 10$cm, $b = 6.5$cm und $\gamma = 40^\circ$

2. In einem Dreieck gilt $a : h_a = 5 : 2$ und $b : c = 3 : 2$. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt 60 cm^2. *Berechnen Sie* die Länge der Seite a.

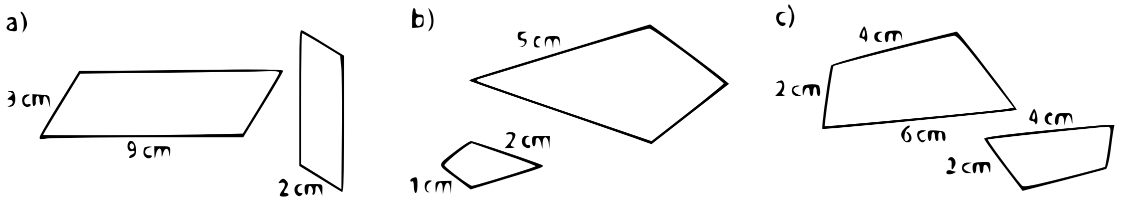
Nun betrachten wir weitere geometrische Figuren. Dabei gilt der folgende allgemeine Satz.

Satz 7.3

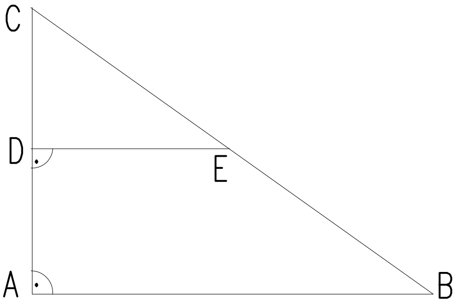
Bei ähnlichen Figuren sind die Längenverhältnisse einander entsprechender Seiten gleich. Die einander entsprechenden Winkel sind sind.

Wenn die Seitenverhältnisse und Winkel gleich sind, dann sind die Figuren ähnlich.

3. Berechnen Sie die fehlenden Seiten der ähnlichen Figuren.



4. Wie gross ist der Flächeninhalt des Trapezes *ABED*? Die Strecke *AD* hat die Länge 4,4 cm, die Strecke *DE* ist 6 cm lang. Das Dreieck *DEC* hat die Fläche 9.9 cm^2 (Vorsicht:Die Längenverhältnisse in der Zeichnung entsprechen nicht diesen Angaben).



5. Hier geht es um Punkte in einen Koordinatensystem. Ein Punkt $(x|y)$ wird also beschrieben durch die beiden Koordinaten x und y. Diese Punkte werden nun auf drei verschiedene Weisen verändert.

Welche dieser drei Operationen machen aus Figuren dazu ähnliche Figuren? Begründung? (Zeichnungen mit Beispielen helfen.)

a) Zunächst werden alle Punkte einer Figur um den Punkt $(1|1)$ um 45 Grad gedreht. Dann werden die x–Koordinate und die y–Koordinate jeden Punktes verdoppelt.

b) Die Koordinaten jeden Punktes werden mit dem Faktor $-0,4$ multipliziert. Dann wird das Vorzeichen der y–Koordinate umgedreht

c) Zunächst wird zur x–Koordinate 4 dazugezählt. Dann wird die y–Koordinate vervierfacht.

Auftrag 7.6

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen

a) Alle gleichschenkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

b) Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

c) Alle rechtwinkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

d) Alle Rechtecke sind zueinander ähnlich.

e) Alle Quadrate sind zueinander ähnlich.

f) Alle Kreise sind zueinander ähnlich.

g) Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, sind sie ähnlich.

h) Wenn bei zwei Dreiecken alle entsprechenden Seiten im gleichen Verhältnis zueinander sind, sind sie ähnlich.

i) Wenn bei zwei Dreiecken zwei entsprechende Seitenlängen im gleichen Verhältnis stehen und ausserdem ein Winkel gleich ist, sind sie ähnlich.

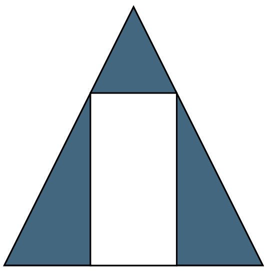
j) Wenn zwei Dreiecke in allen Seitenlängen übereinstimmen, sind sie ähnlich.

k) Wenn zwei Vierecke in allen Seitenlängen übereinstimmen, sind sie ähnlich.

6. Welche der folgenden Quader sind zueinander ähnlich?

Quader	A	B	C	D	E	F
Länge (cm)	3	6	10	7	7	65
Breite (cm)	4	10	14	5	3	39
Höhe (cm)	5	8	6	9	5	91

6. zyl Ein hohler Kegel hat eine Höhe von 24 cm und einen Grundkreisradius von 5 cm. Ein Zylinder passt so unter den Kegel, dass er in 16 cm Höhe genau überall den Rand des Kegels berührt.
Berechnen Sie das Luftvolumen, das zwischen Kegel und Zylinder eingeschlossen ist.
Die Zeichnung zeigt einen Schnitt durch die Figur. Sie ist nicht masstabsgerecht.



7. Für ein Dreieck gilt a=6cm, b = 5cm und c = 4cm. Ein zweites Dreieck ist dazu ähnlich mit a' = 8cm

a) Welchen Umfang hat das zweite Dreieck

b) Wie verhalten sich die Flächen von Dreieck und gestrecktem Dreieck?

8. Ein Dreieck mit a = 14cm, α = 60° und h_a = 5cm ist ähnlich zu einem Dreieck mit dem Flächeninhalt 140cm^2. Wie gross sind a', α' und h'_a in diesem Dreieck?

$\alpha' = \alpha$, h_a = 10cm

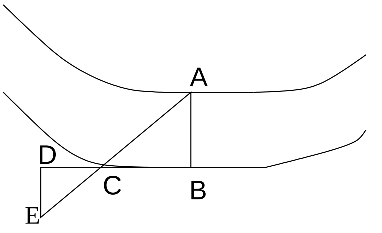
7.2 Bestimmung von Entfernungen

9. Wie hoch ist ein Baum, der einen 22m langen Schatten wirft, wenn gleichzeitig der Schatten eines 1.90m grossen Wanderers 1.50m lang ist?

10. Jemand schliesst ein Auge und hält in 50cm Abstand vor das andere Auge ein 20-Rappen-Stück (Durchmesser 21mm). Damit wird ein exakt dahinter aufgehängtes Kreisrundes Spiegelchen mit einem Durchmesser von 16,8cm gerade verdeckt.

Wie weit vom Auge entfernt ist das Spiegelchen?

11. Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Zeichnung die Breite x eines Flusses, wenn die Strecken BC 28m, CD 14m und DE 11 m messen.



12. Eine Person will einen 18cm langen Bleistift 60cm vom Auge entfernt halten. Dabei soll der Bleistift eine 150m lange Häuserfront verdecken. In welcher Entfernung von der Häuserfront muss sich die Person aufstellen?

13. Ein Pfadfinder bestimmt die Höhe eines Baumes in folgender Weise: Er geht so weit vom Baum weg, bis der Baum durch das 15cm lange Bleistiftstück, das er 50cm vor dem Auge senkrecht hält, verdeckt wird. Mit 100 Schrittlängen zu 75cm misst er den Abstand vom Baum. Berechnen Sie die Höhe des Baumes.

14. Wird eine Erbse von 5mm Durchmesser 56cm vom Auge entfernt vor den Vollmond gehalten, so wird dieser genau von der Erbse verdeckt. Berechnen Sie zu diesem Zeitpunkt die Entfernung Erde–Mond, wenn der Durchmesser des Mondes 3480km beträgt!

8 Lösungsverzeichnis